ИЗУЧЕНИЕ МКТЕМАТИЧЕСКИХ ПОНЯТИЙ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ И ВОЗМОЖНОСТИ ИХ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ В ВУЗОВСКОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

Садовников Николай Владимирович
доцент, доктор педагогических наук,
доцент кафедры общепрофессиональных дисциплин
Пензенского артиллерийского инженерного института,
Военная академия материально-технического обеспечения
(филиал г. Пенза)
Шипанова Елена Викторовна
доцент, кандидат педагогических наук,
доцент кафедры общепрофессиональных дисциплин
Пензенского артиллерийского инженерного института,
Военная академия материально-технического обеспечения
(филиал г. Пенза)
Новичкова Татьяна Юрьевна
доцент, кандидат педагогических наук,
доцент кафедры общепрофессиональных дисциплин
Пензенского артиллерийского инженерного института,
Военная академия материально-технического обеспечения
(филиал г. Пенза)

Аннотация. Рассматриваются теоретические основы изучения математических понятий в школьном курсе и возможность их переноса на вузовский курс математики. Раскрыта суть понятия как одной из условных форм мышления в философском и методическом аспектах. Выделены основные варианты логических схем образования понятий в курсах математики. Установлена связь между такими логическими характеристиками понятия как его содержание и объем. Выявлены основные виды определений математических понятий, встречающихся как в школьном, так и вузовском курсах, а также методические требования к определениям понятий. Обосновывается важность проведения классификации понятия и сформулированы основные требования к ней.

Ключевые слова: уровни познания, чувственное познание, научное познание, понятие как форма мышления, математическое понятие, абстрагирование, идеализация, обобщение, содержание понятия, объем понятия, существенные и несущественные признаки, логическая схема образования понятия, виды определений математических понятий, генетические определения, интуитивные определения, кос венные определения понятий, абстракция, классификация понятий.

Как известно, в процессе познания, можно выделить два основных уровня: уровень чувственного познания и значительно более высокий уровень – научного (логического) познания. Когда невозможно дальнейшее изучение свойств какого-то объекта или явления с помощью наблюдения, восприятия, мы должны включить свою голову (хотя она необходима и при наблюдении, восприятии) и начать размышлять. Можно выделить три основные формы мышления: понятия, суждения и умозаключения. Остановимся на понятии как форме мышления, в которой отражаются существенные признаки изучаемых объектов и отношений между ними.

Понятие образуется с помощью мыслительной операции обобщения, которая в свою очередь неразрывно связана с абстрагированием. Абстрагирование же в математике чаще всего осуществляется через ряд последовательных ступеней обобщения, поэтому в математике содержатся не только абстракции, но и много абстракций от абстракций.

Возьмем простейшее математическое понятие четырехугольника. Основа этого понятия вполне реальная, так как среди окружающих нас объектов есть такие, которые действительно имеют четырехугольную форму. В результате их обобщения появляется геометрическая фигура – «четырехугольник» с определенными углами и сторонами, являющийся непосредственным воспроизведением реальных предметов. Абстрагируясь в дальнейшем от конкретных величин углов и размеров сторон и учитывая лишь наличие четырех сторон и четырех углов, приходим к понятию «четырехугольник» как к результату человеческой мыслительной деятельности.

При построении математических понятий используется часто такой прием мышления, как идеализация. Состоит он в наделении понятия не только свойствами, отвлеченными от их реальных прообразов, но и некоторыми воображаемыми свойствами, отсутствующими у исходных объектов. К таким понятиям относятся как простейшие (или как говорят в математике – основные (неопределяемые)), например, прямая или плоскость, так и сложные, например, кольцо (как алгебраическая структура), n-мерное пространство и т.п.

Каждое понятие имеет объем и содержание. Объем объединяет в себе множество всех объектов или отношений, попадающих под содержание данного понятия. Содержание данного понятия – это совокупность всех существенных свойств, присущих всем элементам множества, и только им. Существенные (отличительные) признаки позволяют выделять множество каких-либо объектов от других. Несущественные (неотличительные) признаки могут быть у объектов данного класса, но они не выделяют их от других объектов. Иначе говоря, существенные признаки - это такие, каждый из которых необходим, а все вместе они достаточны для характеристики объектов, принадлежащих понятию.

Существенными признаками вышеупомянутого нами понятия «четырехугольника» являются: 1) наличие четырех точек (вершин), 2) наличие четырех отрезков, попарно соединяющих эти точки, 3) при этом никакие три точки не лежат на одной прямой. 4) никакие отрезки не пересекаются. Несущественные признаки этого понятия, в частности, длины сторон, месторасположение фигуры, взаиморасположение сторон (их параллельность или перпендикулярность), величина углов. Объемом этого понятия является все множество всевозможных четырехугольников. Процесс конструирования понятий заключается в наличии такого числа необходимых условий, которое было бы достаточно для однозначного определения требуемого класса объектов. Совокупность этих условий и принимают за содержание понятия. Для уменьшения числа существенных признаков в определении понятия целесообразно использовать ближайшее родовое по отношению к нему понятие. В частности, для параллелограмма таковым является понятие четырехугольника, для прямоугольника – понятие параллелограмма, для квадрата – понятие ромба или прямоугольника. Такая логическая схема образования понятий является одной из самых распространенных в теории и методике обучения математике в школе и вузе.

Можно выделить и другие логические варианты конструирования понятий [1]. Например, понятие можно рассматривать как логическую функцию, заданную на множестве суждений и принимающую значение «истинно» или «ложно». Следующий логический вариант под содержанием понятия подразумевает сообщаемую им (семантическую) информацию. Единицей содержания выступают классы объектов, исключаемые понятием из универсума (множества объектов, в терминах которого определяется рассматриваемое понятие). Например, пусть Q – множество четырехугольников. Возьмем два условия: α- иметь равные стороны, β- иметь равные углы. Условие α разбивает универсум (множества Q) на класс – четырехугольники с равными сторонами (A) и его дополнение - класс четырехугольников с неравными сторонами ($\bar{A}$). Условие β разбивает множество A на классы: четырехугольники с равными сторонами и равными углами (B) и четырехугольники с равными сторонами и неравными углами ($\overline{B}$). Класс $\bar{A}$ условием β разбивается на класс C – четырехугольники с неравными сторонами и равными углами и класс $\overline{C}$ - четырехугольники с неравными сторонами и неравными углами. Отсюда содержание понятия квадрата эквивалентно информации, присущей сумме классов: $\overline{B}$+C+$\overline{C}$. Объемом понятия является класс B. Овладеть понятием квадрата означает, прежде всего, уметь распознавать четырехугольники, образующие классы B,$\overline{B}$,C, $\overline{C}$, выводить следствия из принадлежности четырехугольника одному из указанных классов, строить четырехугольники, относящиеся к данным классам, проводить различные классификации понятия четырехугольник. В процессе выполнения этих действий и усваивается информация, выделяющая квадраты из множества четырехугольников, тем самым усваивается формулировка определения понятия.

Главными логическими характеристиками понятия являются его содержание и объем. Если два понятия имеют один и тот же универсум, то их содержания могут либо совпадать, либо частично пересекаться, либо не пересекаться, либо включаться одно в другое. Такие же виды соотношений будут и для объемов этих понятий. Их объемы обычно изображаются с помощью кругов Эйлера. Если объем одного понятия является частью объема второго (другого) понятия, то второе понятие называют родовым, а первое – видовым понятием. Содержание и объем понятия связаны следующим соотношением: если два понятия имеют один и тот же универсум и объем первого из них составляет часть объема второго, то содержание второго понятия составляет часть содержания первого. Другими словами, чем шире объем понятия, тем уже его содержание и наоборот, то есть отношения между содержаниями и объемами двух понятий с одним универсумом носят обратный характер. С этих позиций обобщением понятия называют конструирование нового понятия с большим объемом, чем данное, или с меньшим содержанием, чем данное. Сужением (ограничением) понятия назовем конструирование нового понятия с меньшим объемом, чем данное, или с большим содержанием, чем данное.

Отношение родовидового понятия отличаются от отношения целого к части. Если каждый вид обладает свойствами рода, то части не обладают свойствами целого. Два понятия являются сравнимыми, если можно указать общий для них универсум. Сравнимые понятия, объемы которых находятся в одном из трех видов отношений (совпадающие, в отношении включения, пересекающиеся), называют совместимыми. Тогда можно сказать, что, если объемы некоторых понятий находятся в отношении внеположенности (не пересекаются), то такие понятия несовместимые. Объемы понятий правильная пирамида и пирамида находятся в отношении включения, а объемы понятий ромб и прямоугольник - пересечения; совпадают объемы понятий "медиана равностороннего треугольника» и «высота равностороннего треугольника». Объемы же понятий «многочлен» и «многоугольник» находятся в отношении внеположенности, то есть эти понятия несовместимые.

Содержание математических понятий обычно рассматривается через определение. Выделим основные виды определений математических понятий, наиболее часто встречающихся в школьных и вузовских курсах [2].

1. Как было нами выделено выше, определить понятие - это значит перечислить его существенные признаки. Их перечисление часто бывает непростым, однако, задача упрощается если использовать ранее изученные понятия. Это есть элемент дедуктивного изложения учебного материала. Такой подход обуславливает наиболее распространенный способ определения понятия через ближайший род и видовые отличия». Примерами такого вида определений являются параллелограмма, правильной пирамиды, неправильной дроби и др. В определении такого вида указывается род, в который определяемое понятие входит как вид и добавляются видовые отличия и связь между ними. Перечисление видовых отличий осуществляется посредством дизъюнктивной, конъюнктивной или импликативной связи. В курсе высшей математики даем понятие дифференциального уравнения, как равенства, связывающего независимую переменную, функцию и ее производные. Определения числовых и функциональных рядов даем через родовое понятие «ряд».

2. И в школьном, и в вузовском курсах математики имеют место генетические определения. Главная особенность такого определения состоит в том, что оно вместо видового отличия указывает на способ образования или построения определяемого объекта. В частности, шар – это геометрическое тело, получаемое вращением полукруга вокруг своего диаметра или определения конкретных видов геометрических преобразований, когда мы описываем, как получаются (строятся) образы фигур при том или ином способе геометрического преобразования. В вузе вводим понятие цилиндрических поверхностей: Цилиндрическими поверхностями называются поверхности, образованные прямыми (L), параллельными какой - либо фиксированной прямой L' и пересекающие некоторую кривую G.

3. Определение через показ объекта в общем виде примыкают к генетическим определениям. Но вместо операции конструирования рассматриваются действия между числами и переменными. Пример: уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где a, b, c – некоторые числа, причем $a \neq 0$ Гиперболический параболоид - поверхность второго порядка, каноническое уравнение которой $\dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 2z, \quad где\ p > 0, q > 0$

4. В математике встречаются так называемые индуктивные определения, в которых указывается некоторый базовый объект и правило, позволяющее из него получить новые объекты, входящие в данное понятие. Примерами являются определения арифметической и геометрической прогрессий.

5. Можно выделить так называемые условные определения (или определения- соглашения). Например, тангенсом угла α называется отношение синуса α к косинусу α:

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \text{где } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$$

или $a^0 = 1$, при $a \neq 0$.

6. Выделим описательные определения, используемые на ранних этапах обучения, когда вместо строгих логических определений ограничиваются описанием того или иного объекта. Например, в курсе математики пятого класса из-за принципиальной невозможности дать строгого определения, просто описывают, какие предметы имеют форму прямоугольного параллелепипеда и перечисляют его свойства, опираясь на модель. В высшей математике аналогично можно поступить при ознакомлении курсантов с понятием фрактала.

7. В математике также можно выделить ограниченный набор косвенных определений. К таковым относятся понятия точки, прямой, плоскости, длины отрезка, площади фигуры, объема тела, градусной меры угла, свойства этих понятий раскрываются через систему аксиом. Этим способом, вообще говоря, можно определить почти любое математическое понятие. Например, понятие sinα и cosα можно ввести как функции S(x) и C(x), удовлетворяющие системе условий (аксиом). Например, S(0)=0, C(0)=1, S(π/2)=1, C(π/2)=0 и т.д. Эти функции S(x) и C(x), удовлетворяющие системе аксиом, называют соответственно синусом угла x и косинусом угла x.

8. Отметим редко встречающийся в школе и достаточно часто - в вузе, вид определений через абстракцию от абстракции. Например, вектор в математике как науке можно определить как класс эквивалентности на множестве всех направленных отрезков по отношению эквиполентности, натуральное число – характеристика класса эквивалентности конечных множеств и др.

Выделим основные требования к определению математических понятий: 1) соразмерность, то есть в нем не должно быть лишних признаков и в то же время их должно быть достаточно; 2) отсутствие порочного круга, то есть чтобы определяемое понятие не определялось (явно или скрытно) посредством того же самого определяемого понятия; 3) по возможности не должно быть отрицательным; 4) в определении первого (из вышеперечисленных) вида должно указываться ближайшее родовое понятие. Самым эффективным методическим средством исправления ошибок в определениях понятий является приведение контрпримеров.

Объем понятия раскрывается с помощью классификации, под которой понимают разбиение объема понятия на классы по определенному признаку (основанию). Классификация понятия называется дихотомической, если ее членами являются противоречащие понятия, в отличие от классификации, каждый член которой является соподчиненным понятием.

Классификация понятия должна удовлетворять следующим требованиям: 1) она должна проводиться по одному и тому же признаку (основанию деления); 2) должна быть соразмерной, то есть объединение полученных в результате деления (классификации) объемов понятий должно давать объем делимого (исходного) родового понятия; 3) получающиеся при классификации классы должны быть непересекающимися; 4) деление должно быть непрерывным, то есть в процессе классификации необходимо переходить к ближайшему в данном родовом понятии виду.

В школьной и вузовской практике обучения математике классификация обычно используется после изучения системы сравнимых понятий (крупных блоков, разделов) с целью проверки усвоения всех взаимосвязанных изученных понятии, а также существенных признаков этих понятий.

Список литературы

адовников Н.В. Различные подходы к изучению понятий в школьном курсе математики //формирование математических понятий в контексте гуманитаризации образования: Межвузовский сборник науч. Трудов. Саранск, МГПИ, 2003. С.23-25

аранцев Г.И. Методика обучения математике в средней школе. М., 2002. 224с