УДК 533.6.011.5

УСКОРЕНИЕ (ТОРМОЖЕНИЕ) СВЕРХЗВУКОВОГО ПОТОКА СОВЕРШЕННОГО ГАЗА

Цыбизов Ю.И.

Для анализа особенностей течения плоского сверхзвукового потока идеальной жидкости в качестве параметра введем величину ускорения в некоторой фиксированной точке. В установившемся течении – это конвективное ускорение **a**, зависящее от координат точки, величина которого определяется векторной суммой тангенциального (касательного) $\mathbf{a}_т$ и радиального (центростремительного) $\mathbf{a}_n$ составляющих ускорения [1]. Если ввести безразмерную величину скорости $\lambda = w/\alpha_{кр}$, где w – скорость потока, $\alpha_{кр}$ – критическая скорость звука, то указанные относительные составляющие ускорения имеют вид:

$\mathbf{a}_т = \lambda\partial\lambda/\partial s = (1/D)\lambda^2\partial\psi/\partial\theta$ и $\mathbf{a}_n = \lambda^2/R = -(1/D)\lambda^3\partial\psi/\partial\lambda$. (1)

В(1)s и R – длина дуги и радиус кривизны линии тока (отнесенные к единице длины), ɵ - угол наклона вектора скорости, $D=(\psi,\Phi)/(\lambda,\theta)$ - якобиан преобразования от переменных ψ (функция тока) и Φ (потенциал скорости) плоскости течения в плоскость годографа. Справедливы равенства:

$\partial\psi/\partial\lambda = (\rho\lambda^2)\mathrm{tg}\mu/(a_т[\mathrm{tg}^2\mu - \mathrm{ctg}^2\alpha])$ и $\partial\psi/\partial\theta = -(\rho\lambda^3)/(a_т[\mathrm{tg}^2\mu - \mathrm{ctg}^2\alpha])$,

где $\mathrm{ctg}^2\alpha = (M^2 - 1)$ и $\mathrm{tg}\,\mu = \mathbf{a}_n / \mathbf{a}_т$, M – число Маха, ρ – плотность потока.

Рассматривается сверхзвуковая область течения, где основное уравнение газовой динамики является уравнением гиперболического типа [1-2]. Воспользуемся соотношениями, связывающими линии Маха (характеристики) физической плоскости (ξ,η) с ψ и Φ [2]:

$\partial\psi/\partial\xi = -\rho\lambda\, h1 \sin\alpha$; $\partial\psi/\partial\eta = \rho\lambda\, h2 \sin\alpha$

$\partial\Phi/\partial\xi = \lambda\, h1 \cos\alpha$; $\partial\Phi/\partial\eta = \lambda\, h2 \cos\alpha$. (2)

В (2) параметры характеристической сетки h_1 и h_2 связаны с элементами ds_1 и ds_2 линий Маха соотношениями: $h_1 = ds_1/d\xi$ и $h_2 = ds_2/d\eta$.

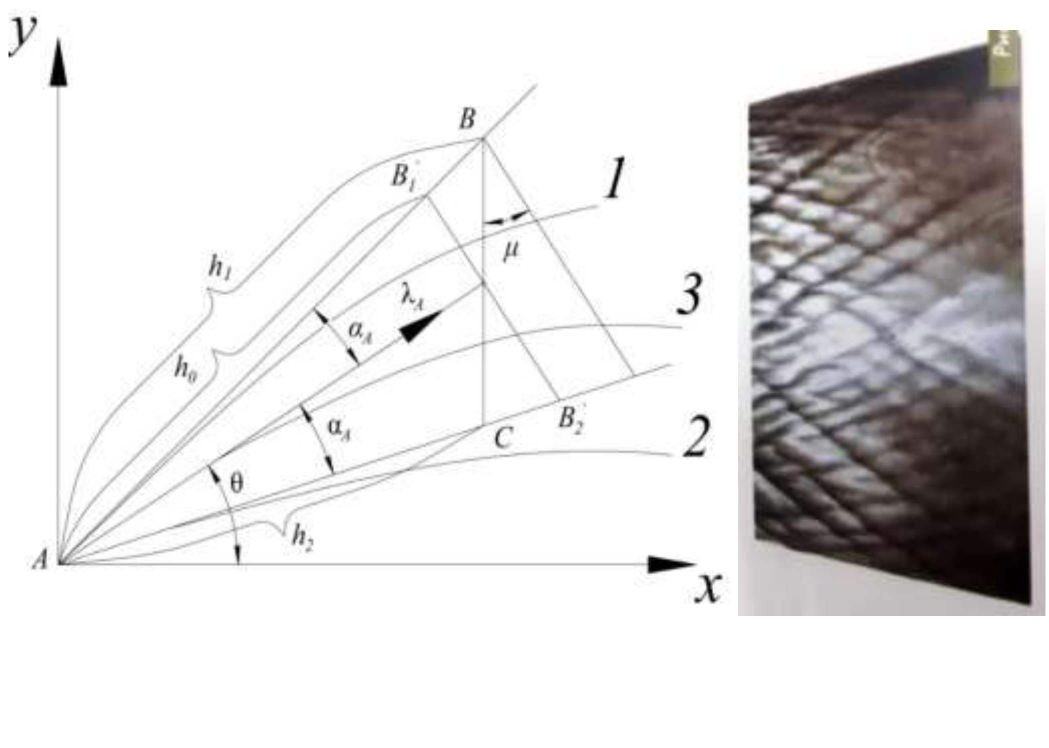
Установим связь вводимых параметров (1) с величинами h_1 и h_2 :

$\mathbf{a}_т = \lambda(\partial\lambda/\partial s1 + \partial\lambda/\partial s2)/2\cos\alpha = \lambda^2\sin\alpha(1/h1 + 1/h2)/2\cos^2\alpha =$

$=[\lambda^2\sin\alpha\,(h1 + h2)]/(2\cos^2\alpha\, h1\, h2) = \lambda^2\,\mathrm{tg}\alpha/ L$,

$\mathbf{a}_n = [\lambda^2(h1 - h2)]/(2\cos\alpha\, h1\, h2) = \lambda^2/R$.

Здесь L – длина биссектрисы характеристического треугольника, определяющего размеры локальной зоны влияния возмущений движущейся частицы в зафиксированной точке (область зависимости), сторонами которого являются элементы характеристической сетки первого и второго семейства h_1 и h_2, а угол при вершине равен $2\alpha = 2\arcsin 1/M$. Биссектриса L совпадает по направлению с вектором скорости потока. Элементы характеристической сетки в произвольной точке A линии тока (фрагмент – «снимок» движущийся частицы) представлены на рис.1 а, где 1 и 2 – характеристики 1-го и 2-го семейств; 3- линия тока; AB – отрезок касательной к характеристике 1-го семейства (линии Маха), равный величине h_1, AC – отрезок касательной к характеристике 2-го семейства, равный величине h_2. Подобные характеристические кривые, как малые возмущения от небольшой шероховатости стенки канала, наблюдаются на практике (картина течения из [4]) представлена на рис.1б.



а) б)

Рис.1 Движущаяся частица в сверхзвуковом потоке

а) характеристическая сетка, б) характеристические кривые на стенке.

В треугольнике АВС (при условии $\mu \neq 90^o - \alpha$) длина биссектрисы и третьей стороны равны $L = (2h_1 h_2 \cos\alpha)/(h_1 + h_2)$ и $h_3 = (h_1 + h_2)\sin\alpha/\cos\mu$. Угол μ на рис.1а соответствует направлению конвективного ускорения потока **а** и совпадает с касательной к линии тока в плоскости годографа. В дальнейшем удобно использовать равенства $h_0 = (h_1 + h_2)/2$ (отрезок $AB_1=AB_2$ на рис.1.а) и $\Delta h = (h_1 - h_2)/2$ (Не теряя общности, положим $h_1 > h_2$). Тогда

$$\mathbf{a_т} = [\lambda^2 h_0 \sin\alpha]/[(h_0^2- \Delta h^2)\cos^2\alpha)] = \lambda^2 \operatorname{tg}\alpha/ h_0 \cos\alpha(1- \operatorname{tg}^2\mu \operatorname{tg}^2\alpha),$$

$$\mathbf{a_n}=(\lambda^2\Delta h)/[(h_0^2-\Delta h^2) \cos^2\alpha)] = \lambda^2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\mu/h_0\cos\alpha(1-\operatorname{tg}^2\mu\operatorname{tg}^2\alpha), \quad (3)$$

$$L = h_0\cos\alpha(1-\operatorname{tg}^2\mu\operatorname{tg}^2\alpha),\ R = (h_0 \cos\alpha \operatorname{ctg}\mu\operatorname{ctg}\alpha(1-\operatorname{tg}^2\mu\operatorname{tg}^2\alpha).$$

На линии тока $d\psi =(\partial\psi/\partial\lambda)d\lambda + (\partial\psi/\partial\theta)d\theta = 0$ и $d\theta = - \operatorname{tg}\mu\ d\lambda/\lambda$, а изменение потенциала скорости вдоль линии тока равно $d\Phi = L \operatorname{ctg}\alpha\ d\lambda$.

Якобиан преобразования:

$$D= \rho\lambda\ h_1h_2 \cos^2\alpha = \rho\lambda\ (h_0^2- \Delta h^2) \cos^2\alpha = \rho\lambda\ h_0^2 \cos^2\alpha(1 - \operatorname{tg}^2\mu \operatorname{tg}^2\alpha). \quad (4)$$

При изменении знака якобиана D в физической плоскости течения образуется складка [1,2], краем которой является предельная линия $\operatorname{ctg}^2\alpha\ (\partial\psi/\partial\theta)^2 - \lambda^2 (\partial\psi/\partial\lambda)^2 = 0$, а условие D = 0 названо в [1] критерием разрушения непрерывности безвихревого течения. Как видно из (4) условию существования предельной линии D=0, являющейся границей гладких линий тока, которую не может пересекать изоэнтропический сверхзвуковой поток, отвечает равенство: $h_0^2- \Delta h^2= 0$, $h_0 = \pm \Delta h$ ($h_1 = 0$ или $h_2 = 0$) и $|\operatorname{tg}\mu| = \operatorname{ctg}\alpha$.

Определим силы, обусловливающие представленные ускорения. Тангенциальное ускорение представим в виде

$$a_т = [\lambda^2 h_0 \sin^2\alpha]/ [(h_0^2- \Delta h^2)2\cos^2\alpha \sin \alpha] =$$
$$= [kPh_0 /2\ \alpha^2_{кр} \cos\alpha]/ [(1/2) \sin2\alpha(h_0^2- \Delta h^2)\rho)]\ ,$$

(т.к. $\lambda^2=w^2/\alpha^2_{кр}$, $\sin^2 \alpha = 1/M^2 = w^2/ \alpha^2$ и $\alpha^2 = kP/\rho$, где α –скорость звука, k- показатель изоэнтропы, P – давление). Тогда числитель $[kPh_0/2\ \alpha^2кр \cos\alpha]$, равен величине тангенциальной составляющей силы локального возмущения, а знаменатель, равный произведению площади разности равнобедренных треугольников со сторонами h_0 и Δh на плотность ρ - масса, участвующая в передаче локального возмущения, зону влияния которой определяет характеристический треугольник со сторонами h_1, h_2 и h_3, биссектрисой L и углом при вершине 2α. Радиальное ускорение

$$\mathbf{a_n}= \operatorname{tg}\mu\ [kP(\Delta h)/2\ \alpha^2_{кр} \sin\alpha]/\rho(\sin2\alpha(h_0^2- \Delta h^2)/2\ ,$$

где числитель – нормальная составляющая силы, обусловливающая поворот потока, а знаменатель - масса зоны влияния возмущений, участвующая в повороте потока.

Таким образом, величины $a_т$, a_n, h_0, Δh и $|\operatorname{tg}\mu| = a_n/a_т$ в фиксированной точке линии тока определяют как бы «неизрасходованные» потенциальные возможности дальнейшего силового воздействия при движении частицы вдоль выделенной линии тока и локальную зону влияния этого воздействия. При этом угол между вектором конвективного ускорения и нормалью к вектору скорости в любой точке линии тока $|\mu|=\operatorname{arctg}(\mathbf{a_n}/\mathbf{a_т})$ определяет вид и основные особенности ускоренного либо замедленного течения, т. е. предсказывает возможную историю дальнейшего развития движения.

Рассмотрим известные точные решения и основные особенности течения сверхзвукового потока, определяемые этими решениями с использованием полученных соотношений.

Течение Прандтля – Майера - решение соответствует условию $\partial(\lambda,\theta)/\partial(x,y) = (\rho\lambda^2)/D= 0$, т.е. решению с простой волной, когда величина скорости и угол наклона ее к выбранной оси - взаимозависимы. Это потерянное (вырожденное) решение описывает обтекание тупого угла сверхзвуковым потоком и широко используется в инженерной практике. В плоскости годографа линия тока в простой волне совпадает с характеристикой (эпициклоидой). В этом случае отрезок h_2 (либо h_1) равен нулю, а ускорения из условий (1.3) равны:

$$\mathbf{a_т}= \lambda^2 \sin2\alpha \sin\alpha/(k+1)\ r = (\rho\lambda)\sin^2\alpha\ (\lambda^2- 1) \operatorname{tg}\alpha/(\rho_{кр}\ r_{кр}\ \alpha_{кр}),$$

$$\mathbf{a_n}= \lambda^2 \sin2\alpha \cos\alpha /(k+1)\ r = (\rho\lambda) \sin^2\alpha\ (\lambda^2- 1)/(\rho_{кр}r_{кр}\alpha_{кр}),$$

где $\rho_{кр}$ и $r_{кр}$ - плотность и текущий радиус на линии $\lambda = M= 1$.

Радиус кривизны линии тока $R = h_0 = (\rho_{кр}r_{кр}\alpha_{кр})\lambda/\rho\sin^2\alpha(\lambda^2 - 1)$. Характеристический треугольник вырождается в прямую линию. В движении принимает участие весь поток. Течение в виде простой волны является связующим звеном (границей) равномерного потока и течением другого равномерного потока либо течения общего вида.

Круговое течение (сжимаемый вихрь) соответствует случаю, когда тангенциальная составляющая скорости и ускорения равны нулю. $\Psi = c\int (\rho/\lambda)\ d\lambda$ и $\Phi = c\theta$ (c- произвольная постоянная), а линии тока – концентрические окружности, радиус которых $R = c/\lambda$. Циркуляция вдоль линий тока $\oint\lambda\ Rd\theta = 2\pi\lambda R = 2\pi c$. Для данного решения ускорение $a_n= \lambda^3/ c$ и $\mu= 90^o$ (условие образования вихря). Уравнение линии тока $r = r_{min} / \lambda$, где r_{min} – минимальное значение при истечении в вакуум. Особенности течения в виде предельных линий отсутствуют.

Радиальное течение (источник, сток) - течение от центра (источник) или к центру (сток). $\Psi = c\theta$ и $\Phi = \int[(\mathrm{ctg}^2\alpha)/(\rho\lambda)]d\lambda$, где c – произвольная постоянная. Уравнение линии тока $r = \pm c/\rho\lambda$. Это сверхзвуковой поток, для которого параметры характеристической сетки $h_1= h_2 =h_0 = c/(\rho\lambda \sin \alpha)$, $\Delta h = 0$. Ускорения $\mathbf{a}_\tau= (\rho\lambda^3)\, \mathrm{tg}^2\alpha$, $\mathbf{a}_n= 0$ и $\mathrm{tg}\mu =0$. Если в плоскости течения на линии тока (рис.1а) зафиксировать точку А с вектором скорости $\boldsymbol{\lambda}_A$, то получим локальную зону влияния в точке А в виде равнобедренного треугольника, где длина биссектрисы $L = h_0\cos\alpha$, а ускорение $a_\tau = \lambda^2\mathrm{tg}\alpha/h_0\cos\alpha$. Условие (математическое) существования предельной линии $D = \rho\lambda\, h_0^2 \cos^2\alpha = (M^2- 1)/\rho\lambda = 0$ выполняется только при $M = 1$, т.е. сверхзвуковое течение – непрерывное, без особенностей.

Спиральное течение - течение общего вида, как результат сложения функции тока радиального и кругового потоков $\Psi = c\int(\rho/\lambda)d\lambda + c_1\theta$, $\Phi = c_1\theta + \int[(\mathrm{ctg}^2\alpha)/(\rho\lambda)]d\lambda$. Уравнение линии тока $r = \pm (c_1^2 + c^2/\rho^2)^{0,5}/\lambda$.

Отрезки характеристической сетки спирального течения в свою очередь являются результатом сложения (суперпозиция) соответствующих величин h_1 и h_2 радиального и кругового течений:

$h_1 = (c_1 - c\,\rho\, \mathrm{tg}\alpha)/(\rho\lambda\sin\alpha)$ и $h_2 = (c_1 + c\,\rho\, \mathrm{tg}\alpha)/(\rho\lambda\sin\alpha)$.

Ускорения $\mathbf{a}_\tau= c_1(\rho\lambda^3)/ [(c_1^2\mathrm{ctg}^2\alpha) - c^2 \rho^2]$, $\mathbf{a}_n= - c\, \rho^2 \lambda^3 /[(c_1^2\mathrm{ctg}^2\alpha) - c^2 \rho^2]$ и $\mathrm{tg}\mu =- c\, \rho/c_1$. Предельная линия $D = \rho\lambda\, h_1\, h_2 \cos^2\alpha = [(c_1^2\mathrm{ctg}^2\alpha) - c^2 \rho^2]/\rho\lambda = 0$. Откуда $\mathrm{ctg}\alpha = \pm c\, \rho/c_1$ или $\mathrm{ctg}\alpha = |\mathrm{tg}\mu|$**,** т. е. наклон линии тока в плоскости годографа совпадает с наклоном характеристики.

Течение с поворотом на 180º (решение Ринглеба), для которого $\Psi = c \sin\theta /\lambda$, $(\Phi = c \cos \theta/\rho\lambda)$ и $f = 1$. Ускорения

$\mathbf{a}_\tau= (\rho\lambda^4) \cos \theta/c\, [M^2 \cos^2\theta - 1]$, $\mathbf{a}_n= (\rho\lambda^4) \sin \theta/c\, [M^2 \cos^2\theta - 1]$ и $|\mathrm{tg}\mu|= \mathrm{ctg}\theta$. Отрезки характеристической сетки: $h0 = (\sin\theta/\rho\lambda^2\sin\alpha)$, $|\Delta h|= (\cos\theta/\rho\lambda^2\cos\alpha)$. Предельная линия $D= c^2 [M^2 \cos^2\theta - 1]/\rho\lambda = 0$ или $\cos^2\theta =1/ M^2 = \sin^2\alpha$, т.е. $|\mathrm{tg}\mu|= \mathrm{ctg}\theta = \mathrm{ctg}\alpha$ и $\theta = \alpha$. Это один из примеров существования в случае $\theta \neq \alpha$ возможности гладкого течения с непрерывным переходом без особенностей от сверхзвукового потока к дозвуковому при замедлении.

Для точного решения уравнений С.А. Чаплыгина [3]:

$\Psi = c \cos2k\theta\, \lambda^{2k}[(1- (k -1)/(k + 1) \lambda^2]^{k/(k-1)} = c \cos2k\theta\, \lambda^{2k} P$,

$(\Phi = c \sin2k\theta\, \lambda^{2k}[(\lambda^2/(2k -1)) - 1)/(2k + 1)])$.

Ускорения $\mathbf{a}_\tau= ((k + 1)/k) \sin2k\theta\, \lambda^{1-2k}) (M^2)/ [4 - 4M^2 + M^4 \cos^22k\theta]$,

$\mathbf{a}_n= ((k + 1)/2k) \cos2k\theta\, \lambda^{1-2k}) (M^2) (2 - M^2)/ [4 - 4M^2 + M^4 \cos^22k\theta]$, $\mathrm{tg}\mu= \mathrm{ctg}2k\theta\, (2 - M^2)/2 = \mathrm{ctg}\alpha\, \mathrm{ctg}2\alpha\, \mathrm{ctg}2k\theta$.

Для предельной линии справедливо: $\mathrm{tg}2k\theta = □\, \mathrm{ctg}\alpha\, (2 - M^2)/2 = □\, \mathrm{ctg}\alpha\, \mathrm{ctg}2\alpha$.

При $M^2 = 2$ $\mathrm{tg}\mu=0$, т.е. $a_n = 0$, а радиус кривизны меняет знак при $M>2$, т.е. является особой точкой. Здесь: $h_1 = \lambda^2 /\cos\alpha\, a_\tau\, [(2 - M^2)/2\mathrm{ctg}2k\theta + \mathrm{ctg}\alpha]$ и $h_2 = \lambda^2 /\cos\alpha\, a_\tau\, [\mathrm{ctg}\alpha - (2 - M^2)/2\mathrm{ctg}2k\theta]$.

На предельной линии $\cos2k\theta = \sin2\alpha$, $2k\theta = 90^\circ - 2\alpha$, т. е. $\mathrm{tg}\mu= \mathrm{ctg}\, \alpha$**.**

Для точного решения уравнений С.А. Чаплыгина [6]:

$\Psi = c \cos2k\theta\, \lambda^{2k}[1- \lambda^2 (k -1)/ (k + 1)]^{k/(k-1)} (c_1 +□)$,

где $□=□\ □[(1- \lambda^2 (k -1)/(k + 1)]/(\lambda^{1+2k})□\, d\lambda$.

Предельная линия: $\mathrm{tg}2k\theta = □\, \mathrm{tg}\alpha\, (\mathrm{ctg}2\alpha + \rho/P^2[(c_1 +□) (\lambda^{1+4k}) 2k])$. Откуда следует заслуживающий внимания факт о том, что границы гладкого (непрерывного) течения при ускорении или замедлении его зависят от выбора произвольной постоянной c_1.

Использование в качестве параметров тангенциальной и радиальной составляющих ускорения, угла наклона ускорения с нормалью к вектору скорости $|\mu|$ и связанных с ними элементами характеристической сетки h_0 и $\pm \Delta h$, позволило определить следующие характерные отличительные особенности известных видов сверхзвуковых течений.

Простая волна, для которой одно из семейств характеристик - прямые линии, а поперечные – криволинейные и линиями тока являются обобщенные решения течения Прандтля-Майера. Отображением всей области течения является дуга эпициклоиды годографа, т.е. $\mathrm{tg}\mu= \mathrm{ctg}\, \alpha$.

Течения специального вида, к которым относятся:

- круговое течение (сжимаемый вихрь) при условии $\mathrm{tg}\mu= 90^\circ$; источник и сток (радиальное течение), когда $\mathrm{tg}\mu = 0^\circ$; сжимаемый диполь [2].

Течения общего вида: спиральное течение, течение Ринглеба, течения, [5,6] и сложное течение в зоне взаимодействия простых волн. Основная особенность этих видов течения - сложная зависимость угла μ от параметров потока. Однако величина этого угла изменяется в узких пределах $0<|\mu|<(90^\circ - \alpha)$. Это же неравенство является необходимым условием непрерывности движения без особенностей. Условие $|\mathrm{tg}\mu| \neq \mathrm{ctg}\alpha$ соответствует условию существования локальной зоны влияния возмущений движущейся частицы по линии тока, имеющей определенные размеры характеристического треугольника, заключенную в нем массу и вполне определенную величину возмущающей силы. В этом случае зона возмущений представляет собой некоторую область физической плоскости, отображаемую в область годографа, состоящую из отрезка линии тока, заключенного между характеристиками первого и второго семейства. На линиях тока $d\theta = - \mathrm{tg}\mu\, d\lambda/\lambda$, переходящее при $|\mu| = 90^\circ - \alpha$ в соотношение для простой волны $d\theta =\mathrm{ctg}\alpha\, d\lambda/\lambda$. При $M^2=2$ $(\lambda^2= (k+1)/k)$ для всех течений с поворотом потока $|\mu| = \alpha = 45^0$ и $a_n= a_\tau$, т.е. до скоростей $\lambda<((k+1)/k)^{0,5}$ превалирует сила, обусловливающая поступательное движение потока, а при $\lambda >((k+1)/k)^{0,5}$- поворот. Таким образом, угол μ определяет не только вид течения, но и предсказывают возможную историю дальнейшего движения. Непрерывное ускоренное (замедленное) движение сверхзвукового потока (без особенностей) вдоль линии тока можно рассматривать как перемещение и деформацию некоторого объема, размеры которого соответствуют локальной зоне влияния возмущений в виде треугольника с углом при вершине равным 2α и сторонами, однозначно связанными с величинами тангенциального и радиального ускорений. Условие появления предельной линии (4) требует выполнения равенств $h_0 = \pm \Delta h$ и $|tg\mu| = \mathbf{a_n} / \mathbf{a_\tau} = ctg\alpha$. В физической плоскости границей течений является простая волна. При достижении такой границы локальная зона влияния возмущений скачком распространяется уже на всю массу потока, т.е. имеет место переход к иной структуре течения в виде простой волны. Физически такой переход характера течения может соответствовать излому контура линии тока, т.е. образованию угловой точки (точки изгиба контура канала).

Литература

1.Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. ч.11. ГИФМЛ. М. 1963. С.727.

2. Мизес Р. Математическая теория течений сжимаемой жидкости. ИИЛ. М. 1961. С.587.

3. Кочетков Ю. Турбулентность и солитоны. Двигатель.2005.№2(38). С.54-55.

4. Цыбизов Ю.И. Одно частное решение уравнения С.А. Чаплыгина.
Изв. АН СССР, МЖГ.1966 № 3. с. 102-105.

5. Цыбизов Ю.И. Некоторые особенности решения уравнения С.А. Чаплыгина. Изв. АН СССР, МЖГ.1968 № 4. с. 29-31.

Продолжение

Точные решения годографа скорости позволили выявить закономерности и особенности течений общего характера, которые не могут быть получены при использовании численных методов. Одна из особенностей – предельные линии, образующиеся в сверхзвуковом потоке [1,2]. Вводя в качестве параметра течения величину конвективного ускорения **a** в некоторой фиксированной точке и зависящего от координат точки, определяемого векторной суммой тангенциального (касательного) $\mathbf{a_\tau}$ и радиального (центростремительного) $\mathbf{a_n}$ **,**